Sujet

Dans chaque cas, déterminer

a) la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$

b) le signe de la fonction dérivée $f'(x)$

c) le sens des variations de la fonction $f(x)$

d) une équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x)$ au point d'abscisse 1

e) la vitesse moyenne (le taux d'accroissement moyen) de la fonction $f(x)$ entre 2 et 2.1

f) la vitesse instantanée (le taux d'accroissement instantané) de la fonction $f(x)$ en 2

q1) $f(x) = 5x^2 + 4x - 3.$

q2) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1.$

q3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-5}.$

q4) $f(x) = x^2\sqrt{x}.$

Corrigé

q1) Etude de la fonction $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$.

a) La fonction dérivée de la fonction $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$ est

$$f^{'}(x) = 5\left(x^2\right)^{'} + 4x^{'} - 3^{'} = 5 \times 2x + 4 \times 1 + 0 = 10x + 4.$$

b) Etudions le signe de $f^{'}(x)$.

$$f^{'}(x) \geq 0 \iff 10x + 4 \geq 0 \iff 10x \geq -4 \iff x \geq \frac{-4}{10} \iff x \geq -\frac{2}{5}.$$

c) Par suite, on obtient les variations de la fonctions $f(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f^{'}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{19}{5}$	$\nearrow$	

d) Une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = f(1) + f^{'}(1)(x - 1).$$

Sachant que $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$ et $f^{'}(x) = 10x + 4$, on obtient $f(1) = 6$ et $f^{'}(1) = 14$, de telle sorte qu'une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = 6 + 14(x - 1) = 14x - 8.$$

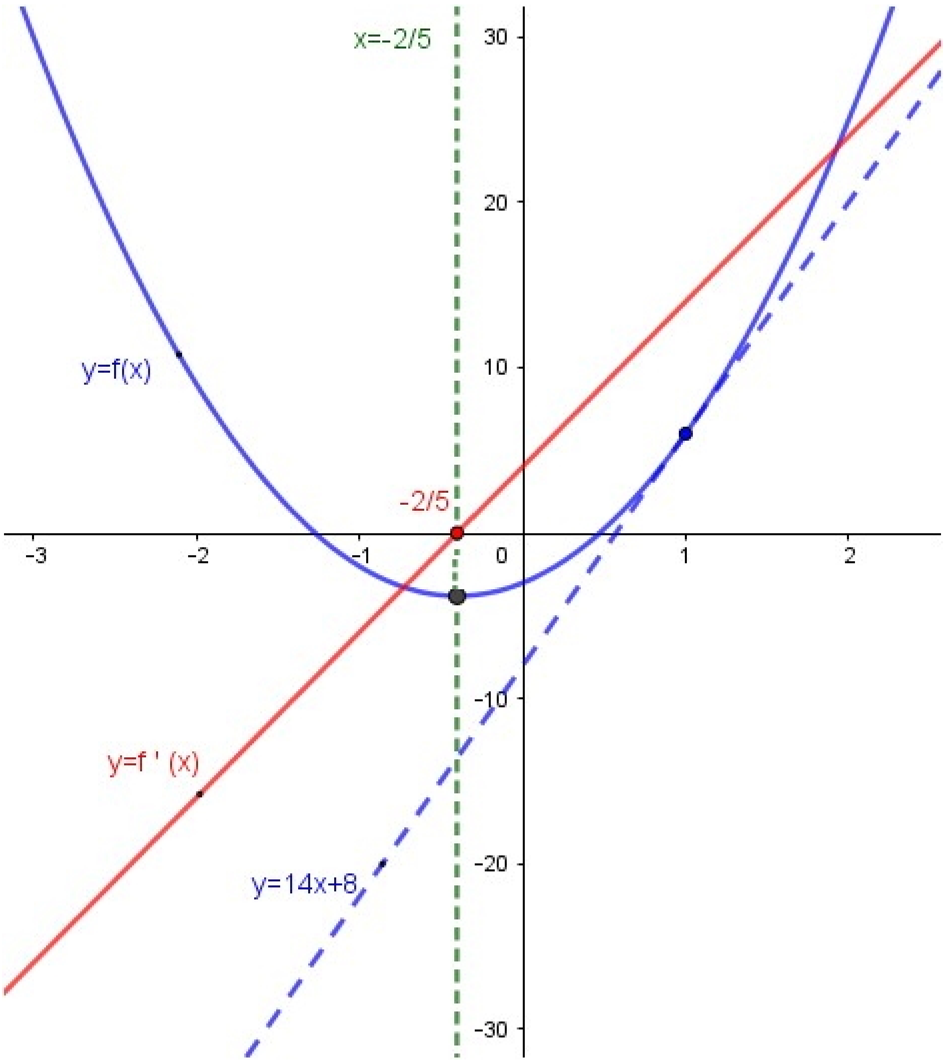
e) La vitesse moyenne (le taux d'accroissement moyen) de la fonction $f(x)$ entre 2 et 2.1 est

$$\begin{aligned}\frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} &= \frac{27.45 - 25}{0.1} \\ &= 2.45 \times 10 \\ &= 24.5\end{aligned}$$

f) La vitesse instantanée (le taux d'accroissement instantané) de la fonction $f(x)$ en 2 est

$$f^{'}(2) = 10 \times 2 + 4 = 24.$$

Vérification graphique.



q2) Etude de la fonction $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$.

a) La fonction dérivée de la fonction $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$ est

$$f^{'}(x) = 2\left(x^3\right)^{'} - 5\left(x^2\right)^{'} + 4x^{'} + 1^{'} = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 4 \times 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 4.$$

b) Etudions le signe de $f^{'}(x) = 6x^2 - 10x + 4 = 2\left(3x^2 - 5x + 2\right)$.

Le discriminant du polynôme $3x^2 - 5x + 2$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$.
Puisque $\Delta > 0$, le polynôme $3x^2 - 5x + 2$ admet deux racines réelles

$$\frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1.$$

Puisque $3 > 0$, le tableau de signes du polynôme $3x^2 - 5x + 2$ est

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Par suite, on obtient les variations de la fonctions $f(x)$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{55}{27}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

d) Une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = f(1) + f^{'}(1)(x - 1).$$

Sachant que $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$ et $f^{'}(x) = 6x^2 - 10x + 4$, on obtient $f(1) = 2$ et $f^{'}(1) = 2$, de telle sorte qu'une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = 2 + 0(x - 1) = 2.$$

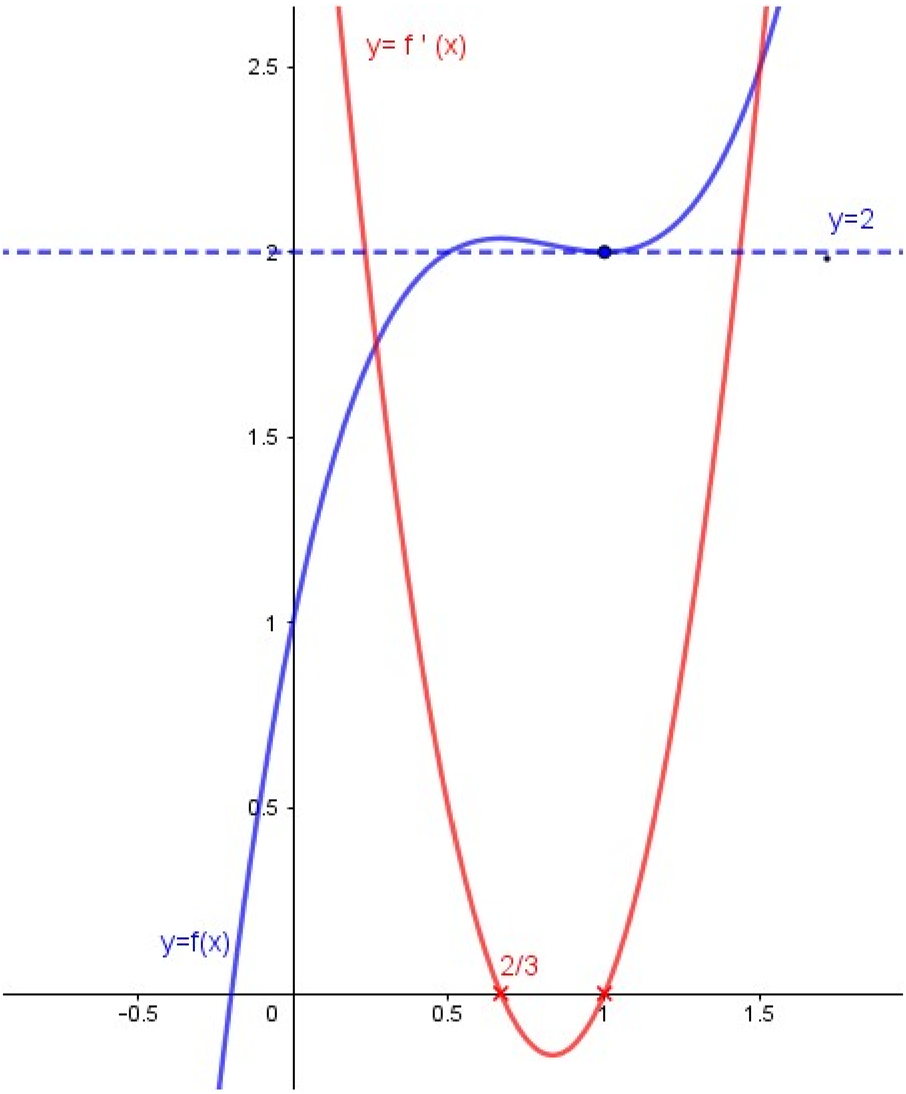
e) La vitesse moyenne (le taux d'accroissement moyen) de la fonction $f(x)$ entre 2 et 2.1 est

$$\begin{aligned} \frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} &= \frac{5.872 - 5}{0.1} \\ &= 0.872 \times 10 \\ &= 8.72 \end{aligned}$$

f) La vitesse instantanée (le taux d'accroissement instantané) de la fonction $f(x)$ en 2 est

$$f^{'}(2) = 6 \times 2^2 - 10 \times 2 + 4 = 8.$$

Vérification graphique.



q3) Etude de la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$. Notons que $2x - 5 \neq 0$ soit $2x \neq 5$, $x \neq \frac{5}{2}$.

a) La fonction dérivée de la fonction $f(x)$ est

$$f^{'}(x) = \frac{(3x+1)^{'}(2x-5) - (3x+1)(2x-5)^{'}}{(2x-5)^2} = \frac{3(2x-5) - (3x+1)2}{(2x-5)^2} = \frac{6x - 15 - 6x - 2}{(2x-5)^2} = \frac{-17}{(2x-5)^2}.$$

b) Etudions le signe de $f^{'}(x)$.
Puisque $-17 < 0$ et $(2x-5)^2 > 0$, on a $\frac{-17}{(2x-5)^2} < 0$ soit $f^{'}(x) < 0$.

c) Par suite, on obtient les variations de la fonctions $f(x)$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f^{'}(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

d) Une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = f(1) + f^{'}(1)(x-1).$$

Sachant que $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ et $f^{'}(x) = -\frac{17}{(2x-5)^2}$, on obtient $f(1) = -\frac{4}{3}$ et $f^{'}(1) = -\frac{17}{9}$, de telle sorte qu'une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = -\frac{4}{3} - \frac{17}{9}(x-1) = -\frac{17}{9}x - \frac{4}{3} + \frac{17}{9} = -\frac{17}{9}x + \frac{5}{9}.$$

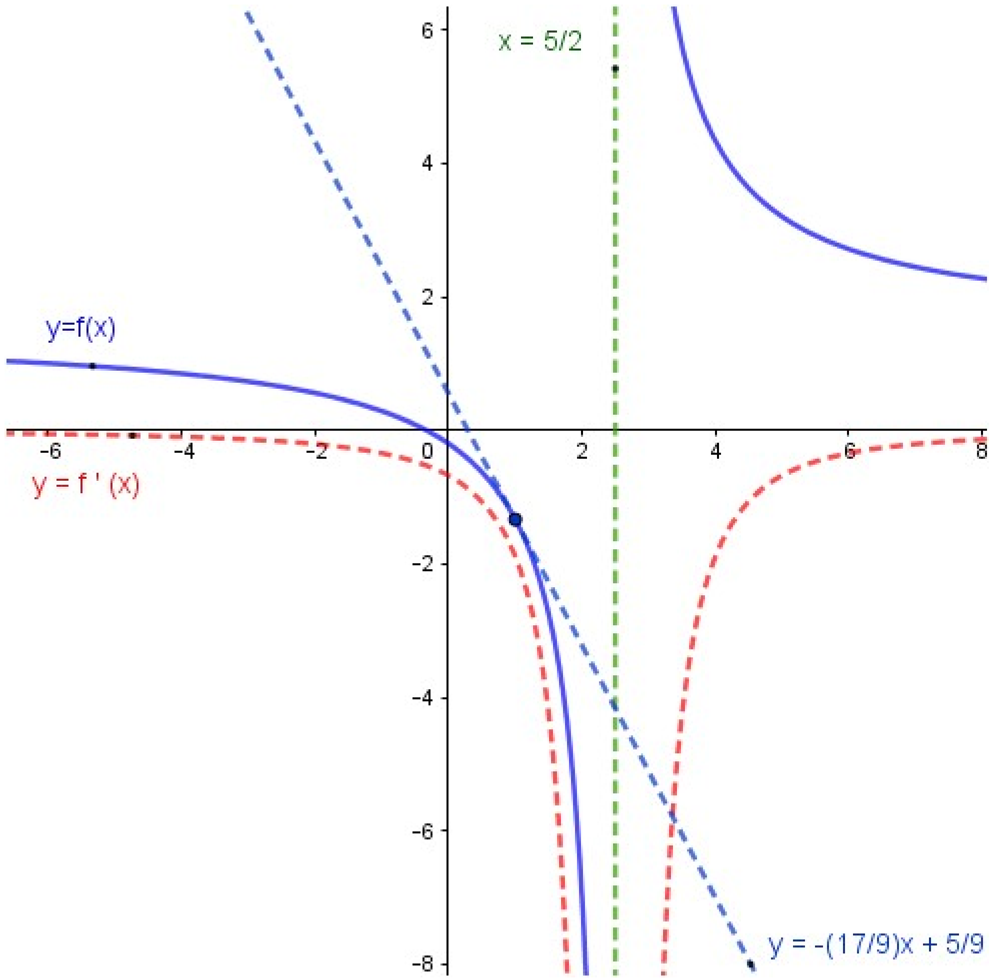
e) La vitesse moyenne (le taux d'accroissement moyen) de la fonction $f(x)$ entre 2 et 2.1 est

$$\frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} = \frac{(-9.125) - (-7)}{0.1} = -2.125 \times 10 = -21.25.$$

f) La vitesse instantanée (le taux d'accroissement instantané) de la fonction $f(x)$ en 2 est

$$f^{'}(2) = -\frac{17}{(2 \times 2 - 5)^2} = -17.$$

Vérification graphique.



q4) Etude de la fonction $f(x) = x^2\sqrt{x}$. Notons que $x \geq 0$.

a) La fonction dérivée de la fonction $f(x)$ est définie pour $x > 0$ avec

$$f^{'}(x) = \left(x^2\right)^{'}\sqrt{x} + x^2\left(\sqrt{x}\right)^{'} = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}\,2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}.$$

b) Signe de $f^{'}(x)$: il est immédiat que $\forall x > 0 \quad f^{'}(x) > 0$.

c) Par suite, on obtient les variations de la fonctions $f(x)$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f^{'}(x)$	$\|\|$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	0 $\nearrow$

d) Une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = f(1) + f^{'}(1)(x-1).$$

Sachant que $f(x) = x^2\sqrt{x}$ et $f^{'}(x) = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$, on obtient $f(1) = 1$ et $f^{'}(1) = \frac{5}{2}$, de telle sorte qu'une équation de la tangente à courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 est

$$y = 1 + \frac{5}{2}(x-1) = \frac{5}{2}x + 1 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}.$$

e) La vitesse moyenne (le taux d'accroissement moyen) de la fonction $f(x)$ entre 2 et 2.1 est

$$\frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} = \frac{4.41\sqrt{2.1} - 4\sqrt{2}}{0.1} = 44.1\sqrt{2.1} - 40\sqrt{2} \sim 7.33.$$

f) La vitesse instantanée (le taux d'accroissement instantané) de la fonction $f(x)$ en 2 est

$$f^{'}(2) = \frac{5 \times 2^2}{2\sqrt{2}} = \frac{20}{2\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \sim 7.07.$$

Vérification graphique.